ESERCIZI SULLA TEORIA DELLA MISURA

A. Figà Talamanca

9 ottobre 2006

Definizione 1. *Dato un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ la misura esterna $m^*(E)$ di E è così definita:*

$$m^*(E) = \inf\{\sum_n I_n : I_n \text{ intervalli aperti } E \subset \bigcup_n I_n\}$$

Esercizio 1 *Se $A \subset B$ allora $m^*(A) \leq m^(B)$.*

Esercizio 2 *La misura esterna di un intervallo (aperto o chiuso o semiaperto) è la sua lunghezza.*

Esercizio 3 *La misura esterna di un punto è zero. Pure zero è la misura esterna di un insieme finito o di un insieme numerabile.*

Esercizio 4 *La misura esterna dell'insieme di Cantor è zero.*

Esercizio 5 *Se A_n è una famiglia al più numerabile di insiemi, allora*

$$m^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n m^*(A_n).$$

Definizione 2. *Un insieme E si dice misurabile se per ogni insieme A vale la condizione*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap \tilde{E}).$$

Esercizio 6 *L'unione finita di insiemi misurabili è misurabile.*

Esercizio 7 *Il complemento di un insieme misurabile è misurabile*

Esercizio 8 *Un insieme E è misurabile se e solo se, per ogni reale x è misurabile l'insieme $E + x$.*

Esercizio 9 *Se A è un insieme e $E_1, \ldots, E_n$ sono insiemi misurabili, allora*

$$m^*(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i).$$

Esercizio 10 *L'unione e l'intersezione numerabile di insiemi misurabili è misurabile. Ogni insieme di misura esterna nulla è misurabile.*

Esercizio 11 *Una semiretta aperta è misurabile*

Esercizio 12 *Un insieme aperto è misurabile*

Definizione 3 *Si dice σ-algebra una collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che è chiusa rispetto alle unioni al più numerabili e alla complementazione*

Esercizio 13 *La famiglia $\mathfrak{M}$ degli insiemi misurabili è una σ-algebra.*

Esercizio 14 *Sia $\mathfrak{B}$ l'intersezione di tutte le σ-algebre che contengono gli insiemi aperti. Dimostrare che $\mathfrak{B}$ è propriamente contenuta nell'algebra $\mathfrak{M}$ degli insiemi misurabili.*

Esercizio 15 *Dimostrare che esiste un insieme non misurabile.*

Esercizio 16 *Dimostrare che ogni sottoinsieme di misura esterna positiva contiene un insieme non misurabile.*

Esercizio 17 *Dimostrare che esiste una funzione crescente e continua da $[0,1]$ a $[0,1]$ che manda un insieme misurabile in un insieme non misurabile.*